# 连续铸钢二次冷却边界条件参数的确定

在本次讨论会上宝钢集团公司的郭朝晖博士提出了关于连续铸钢二次冷却过程中边界条件的参数的确定问题，即如何利用钢坯表面的测量数据来确定喷水量和带走热量之间的关系。同时，他还提出了如何用统计方法或统计方法与机理方法结合来克服测量过程中的误差问题。

在讨论中，与会的英国专家 J.Ockendon 等提出用喷水冷却的机理重新建立问题的数学模型（见本报告集研究报告之四），与会其他学术界专家建议用反问题的方法解决这一问题。

## 1 、热传导模型

以速度 U 拉动的钢坯在冷却过程中的温度分布 T 满足下述似稳态非线性热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(k(T)\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k(T)\frac{\partial T}{\partial y})-\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial z}U=q,\ (x,y)\in\Omega$$

其中 $T(x,y,z)$ 为点 $(x,y,z)$ 处的温度， $\Omega$ 为钢坯横截面， $z$ 为至一次冷却出口的距离， $C(T),\rho(T),k(T)$ 分别为比热，密度和热传导系数， $q(T)$ 为吸收的固化潜热。成立

$$q(T)=U\rho L\frac{\partial f_s}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}$$

通常令

$$\frac{\partial f_s}{\partial T}=-\frac{1}{T_l-T_s}$$

而 $T_l$ 为完全液化温度， $T_s$ 为完全固化温度， $L$ 为钢的固化潜热。

将潜热项代入似稳态非线性热传导方程可得

$$U\rho(C+\frac{L}{T_l-T_s})\frac{\partial T}{\partial z}=\mathrm{div}(k(T)\nabla T)$$

引入焓

$$H(T)=\int_0^T \rho(\xi)[c(\xi)+\frac{L}{T_l-T_s}]d\xi$$

和 Kirchhoff 变换

$$\Psi(T)=\int_0^T \frac{k(\xi)}{k_0}d\xi$$

并令 $z=Ut$, 方程简化为

$$\frac{\partial H}{\partial}=k_0\Delta\Psi,\quad \text{in } \Omega\times(0,t_0)$$

在 $t=0$ ，即一冷出口处成立

$$T(x,y,0)=T_0(x,y),\quad (x,y)\in\Omega$$

在钢坯的周边 $\partial\Omega$ ，满足如下的热交换条件

$$k(T)\frac{\partial T}{\partial n}=T(h_1W^r-h_0),(x,y)\in\Omega,\quad t\in(0,t_0)$$

其中 $W$ 为喷水量， $h_0,h_1$ 和 $r$ 为需要确定的参数。通常将二冷区剖分为 $(0,t_1),(t_1,t_2),\cdots,(t_j,t_{j+1}),\cdots,(t_{N-1},t_N),(t_n,t_0)$ 等 $N+1$ 个区域，在每个区域中，这些参数为常数，同时，在这些区域中喷水量也为常数。

对此热交换边界条件采用 Kirchoff 变换得

$$k_0\frac{\partial\Psi}{\partial n}=T(h_1W^r-h_0)$$

于是连铸二冷的热交换可用以下偏分方程的边值问题来描述

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial t}=k_0\Delta\Psi, & \text{in } \Omega\times(0,t_0)\\ T(x,y,0)=T_0(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ k_0\frac{\partial\Psi}{\partial n}=T(h_1W^r-h_0), & (x,y)\in\Omega\end{cases}\qquad \text{(DP)}$$

而在 $T, H, \Psi$ 之间存在已知的一一对应关系，而

$$h_0 = h_0^i,\ h_1 = h_1^i,\ r = r^i,\ \text{当} t \in (t_{i-1},\ t_i),\ i = 1, \cdots, N.$$

这就是正问题的数学模型。

## 2 、反问题的提法

对上述正问题 (DP)，若 $h_0, h_1$ 和 $r$ 为已知，问题的解是存在唯一的，并且可用差分法，有限元法或径向基方法求得其数值解。但是宝钢集团公司提出的问题是用测量钢坯表面一部分的温度的方法来确定参数 $h_0, h_1$ 和 $r$ 。设 $\Gamma_0 \in \partial\Omega$ ，我们设法测量 $\Gamma_0$ 的温度来确定这些待定的参数。现在问题归结为：求 $T$(或 $\Psi, H$)，使得它们满足边值问题 (DP) 且成立

$$T|_{\Gamma_0} = \overline{T}(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_0, t \in (t_b, t_e)$$

其中 $\overline{T}(x, y, t)$ 即为在钢坯表面 $\Gamma_0$ 的测量值， $(t_b, t_e)$ 为测量的时间范围。

这一反问题可以化为一个变分问题。若给定了 $h_0, h_1$ 和 $r$，正问题有解，对应的温度分布函数可以记为 $T(x, y, t)(h_0, h_1, r)$，表示它是依赖于 $h_0, h_1$ 和 $r$ 的。考察泛函

$$F(h_0, h_1, r) = \int_{t_b}^{t_e} \int_{\Gamma_0} [T(x, y, t)(h_0, h_1, r) - \overline{T}(x, y, t)] ds dt \qquad \text{(FN)}$$

上述反问题即可化为变分问题，即在 $h_0, h_1$ 和 $r$ 的某个允许值范围内

$$\min F(h_0, h_1, r) \qquad \text{(IP)}$$

## 3、反问题的求解

令 $\vec{h_0}=(h_0^1,\cdots,h_0^N),\vec{h_1}=(h_1^1,\cdots,h_1^N),\vec{r}=(r^1,\cdots,r^N)$，采用适当的数值积分方法，泛函 (FN) 可离散化为

$$F(h_0,h_1,r)=\overline{F}(\vec{h_0},\vec{h_1},\vec{r})$$

相应的变分问题化为多元函数的极小化问题

$$\min\overline{F}(\vec{h_0},\vec{h_1},\vec{r})$$

此问题可用梯度法或遗传算法进行求解

(谭永基 整理)