电缆橡胶绝缘体应力分析

背景

110Kv 及以上的高压交联电缆附件广泛使用橡胶预制件，因为预制件尺寸比电缆小，当它们套上电缆时，会因为扩张产生压力从而对电缆形成表面固紧力。由此产生一系列实际问题：

1）橡胶件的固紧力如何计算？

2）橡胶件形状变化对固紧力有无影响？如果有，能够用公式来描述？

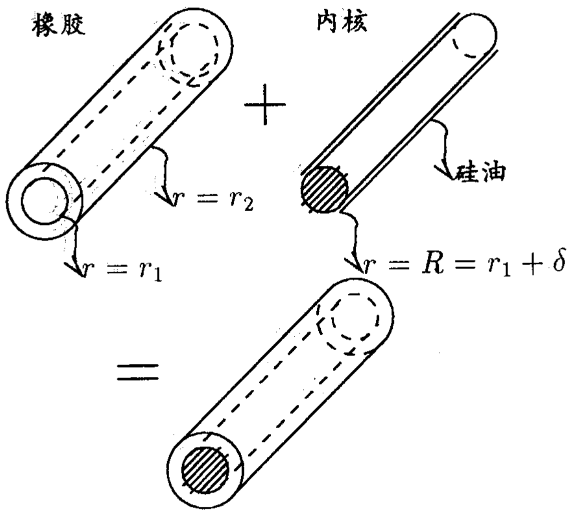
3）实验证明，电缆表面不圆整对固紧力的影响很大。试问是否能够得到一个公式，直接计算表面不圆整对固紧力的影响？

4）橡胶件是粘弹性体，随着时间的推移会发生应力松弛。试问有没有计算应力松弛的数学公式，以预防应力松弛导致固紧力太小。

线性理论

1．问题的简化

电缆导线外包有一层空心橡胶绝缘体，体内注入硅油，将导体与橡胶分隔，如下图所示：

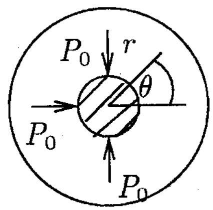


其中，导线半径为 r_1 ，硅油厚度为 δ ，橡胶层厚度为 $r_2 - r_1 - \delta$

2．轴对称模型

对于上述简化问题可以建立一个轴对称模型如下：建立极坐标 (θ, r) ，在平衡状态下，应力张量

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$



满足

$$\nabla \sigma = 0$$

于是

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0 \tag{2}$$

在导体表面 $r=r_1$ 上，应满足边界条件：

$$\sigma\cdot\vec{n}=P_0\cdot\vec{n} \qquad P_0\text{为已知应力}$$

$$u_r=\delta \qquad \begin{array}{l}\delta\text{ 为已知径向位移}\\ u_r\text{ 为径向位移}\end{array}$$

在橡胶表面 $r=r_2$ 上，应满足 $\sigma\cdot\vec{n}=\vec{\theta}$. 由 (1), (2) 可以知道存在 A（应力函数）满足

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} \tag{3}$$

$$\sigma_{r\theta}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial A}{\partial\theta} \tag{4}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \tag{5}$$

同样，位移 (u_r,u_θ) 符合虎克定律

$$\sigma_{ij}=\mu\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\}+\lambda\left(\sum\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

其中 μ,λ 为 LAMÉ 常数。于是可得

$$\nabla^4 A=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2 A=0$$

根据轴对称性，

$$A=A_0\log r+B_0 r^2\log r+C_0 r^2+D_0$$

$$u_\theta=0,\quad \frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_{rr}-\nu\sigma_{\theta\theta})$$

其中 ν 为泊松比， E 为杨氏模量。我们发现：

$$B_0=0, \qquad \sigma_{r\theta}=0$$

$$\sigma_{rr}=\frac{A_0}{r^2}+C_0, \qquad \sigma_{\theta\theta}=-\frac{A_0}{r^2}+C_0$$

$$u_r = \frac{1+\nu}{E}\left\{-\frac{A_0}{r} + 2C_0(1-2\nu)r\right\}$$

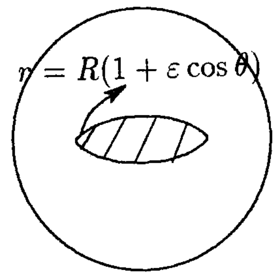
将 $u_r|_{r=r_1} = \delta$ 代入得到：

$$P_0 = \frac{\delta E(r_2^2 - r_1^2)}{(1+\nu)(r_2^2 + (1-2\nu)r_1^2)r_1}$$

将 $\sigma_{rr}|_{r=r_1} = P_0$，$\sigma_{rr}|_{r=r_2} = 0$ 代入得到

$$u_r = \frac{1+\nu}{E(r_2^2 - r_1^2)}\left[\frac{r_1^2 r_2^2 r_1^2 P_0}{r} + (1-2\nu)P_0 r_1^2 r\right]$$

一般情况



1．椭圆形核心（小变形）

极坐标下，椭圆形核心边界可用

$$r = R(1+\varepsilon\cos\theta) \quad r = r_1$$

表示，其中 $0 < \varepsilon \ll 1$. 为简便起见，假设 $\varepsilon \ll \delta$ (如果 $\varepsilon \sim \delta$, 需要修正最低阶解 lowest order solution)). 于是可得

$$u_r = R(1+\varepsilon\cos\theta) \quad r = r_1$$

$$P = P_0 + \varepsilon P_1(\theta)$$

记

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(0)} & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} \end{pmatrix} + \varepsilon\sigma^{(1)}$$

$$A = A_0(r) + \varepsilon A^{(1)}(r,\theta)$$

在边界 $r=r_1$ 上，

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\sigma_{rr}^{(1)}\\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{rr}^{(0)} & 0\\ 0 & \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\varepsilon R\sin\theta\end{pmatrix} = (P_0+\varepsilon P_1)\begin{pmatrix}1\\ -\varepsilon R\sin\theta\end{pmatrix}$$

可以推出，

$$P_1 = \textsc{Const.}\cdot\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=r_1}$$

但是，

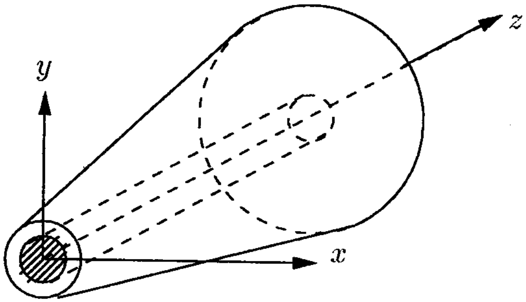
$$\sigma_{rr}^{(1)} = \cos\theta\cdot f^n(r) \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sin\theta\cdot f^n(r) \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \cos\theta\cdot f^n(r)$$

因此，

$$P_1 = \textsc{Const.}\cdot\cos\theta$$

（当 $\delta\sim\varepsilon$ 时，依赖关系更复杂）

2．锥体



现在考虑电缆为锥体的情况，令中心线为 Z 轴。这样方程就变成

$$\sigma\cdot\vec{n}=0 \quad \text{在 } r=r_2(1+\varepsilon Z) \text{ 处。}$$

再设 $0<\varepsilon\ll 1$, 现在

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta Z}=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial\sigma_{rZ}}{\partial Z}=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{rZ}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{ZZ}}{\partial Z}+\frac{\sigma_{rZ}}{r}=0$$

于是

$$\sigma_{rr}=\frac{\partial}{\partial Z}(\nu\nabla^2A-\frac{\partial^2A}{\partial r^2})$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial Z}(\nu\nabla^2A-\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r})$$
$$\sigma_{ZZ}=\frac{\partial}{\partial Z}((2-\nu)\nabla^2A-\frac{\partial^2A}{\partial Z^2})$$
$$\sigma_{rZ}=\frac{\partial}{\partial r}((1-\nu)\nabla^2A-\frac{\partial^2A}{\partial Z^2})$$

且

$$\nabla^4A=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)^2A=0$$

由于我们希望在 $r=r_1$ 处，

$$u_r\propto 1+\varepsilon Z,$$

可得

$$\frac{\partial^2A}{\partial r\partial Z}\propto 1+\varepsilon Z$$

取

$$A \sim A_0(r) + \varepsilon Z^2 A_1(r)$$

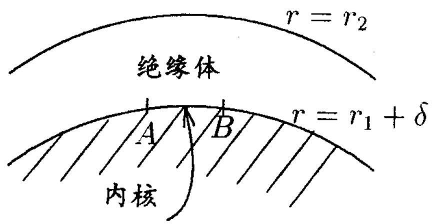
推出

$$\sigma_{rr} \sim \sigma_{rr}^{(0)} + 2\varepsilon Z(\nu(A_1'' + A_1'\frac{1}{r}) - A_1 + 2\nu A_1)$$

于是

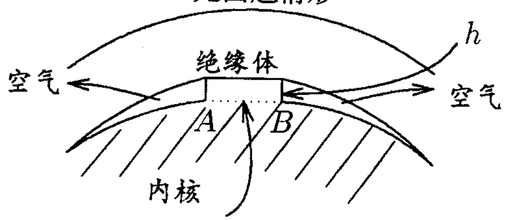
$$P \sim P_0(1 + \lambda\varepsilon Z) \qquad \lambda\text{为常数。}$$

3． 凸起问题



力=35KN

无凸起情形



力=95KN

$h = 0.3\text{mm}$

摄动情形

CD受力 $= AB$受力, 我们得到一个接触问题。由于

$$|AC| \simeq \sqrt{2(r_1+\delta)h} \gg |AB|$$

因而压力被放大。

非线性弹性问题

仍然有

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

对不可压缩橡胶有： $u_r = \frac{K}{r}$，但是

$$\sigma_{rr} = \frac{K'}{r^2}$$

是否仍然成立？需要查阅参考书。

参考书目

[1]*Nolinear Elasticity*, Green, A.E.ZERNA

[2]*Theoretical Elasticity*, 1965-70

[3]*Physics of Rubber Elasticity*, Treloar 1956

(J.Ockendon, 陆立强 整理)