

高炉问题

1、引言

这一问题是浙江大学的刘祥官教授提出的，来自临汾等钢铁厂。图1是高炉工作状况的示意图。

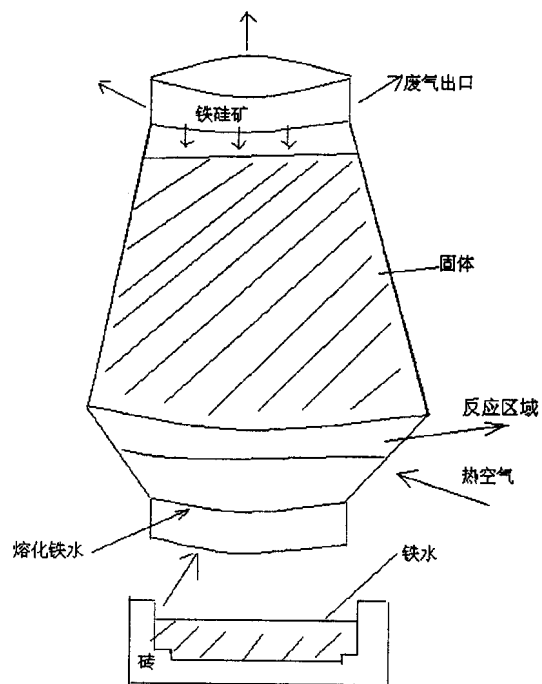


图 1

主要问题是：

- 1) 软熔带的位置在什么地方？
- 2) 如何来控制它的位置？
- 3) 什么是控制参数？
- 4) 什么是软熔带的形状，即是 M 形、W 形、∩ 形或 U 形？

从软熔带的形状可以预测什么？

- 5) 能否从温度的某些测量值确定炉底耐火砖的烧熔情况？(参见图 2)

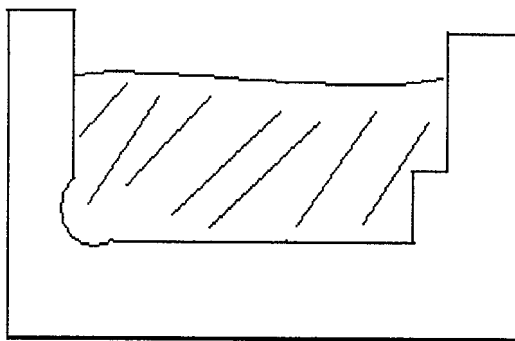


图 2

2、一维热传导问题

假设：

- 气体和固体满足能量守恒；
- 通过多孔介质的气体的 Ergun 流满足：

$$Au + Bu |u| = -\nabla \phi$$

前一项达西项可以略去。

- 固体顶部的位置是已知的；

- 铁水是从软熔带开始产生的，没有熔化的金属从上面滴下；
- 熔化潜热归并到反应项中；
- 相变需要的能量全部来自热空气引起的炭和氧的化合反应；
- 整个系统是绝热的（我们作了一些粗略的估计）；
- 暂时忽略最终产品的纯化。

控制参数是：

- 1) 气体的压力；
 - 2) 气体的温度；
 - 3) 原料的混合（化学上）
 - 4) 在顶部位置的位移率。
- 可以建立数学模型如下（参见图 3）

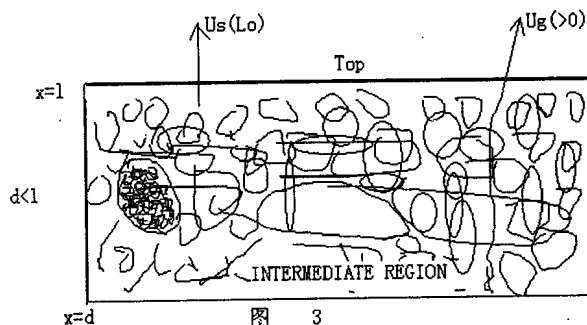


图 3

采用记号 $\frac{\partial T_s}{\partial x} = T_{s,x}$ 等等。模型为：

$$p_s c_s (u_s T_{s,x}) = h(T_g - T_s) + k_s T_{s,xx} \text{ (最后一项略去)}$$

$$p_g c_g (u_g T_{g,x}) = h(T_s - T_g) + k_g T_{g,xx} \text{ (最后一项略去)}$$

$$\text{div}(\rho_g q_g) = 0 \Rightarrow u_{g,x} = 0$$

$$u_g | u_g | = -k \frac{dp_g}{dx} \text{ (Ergun 定律)}$$

u_s 给定。

T_a : 外界温度

T_m : 熔化温度

在 $x = L$: $T_s = T_a$, $p_g = P_a$

在 $x = d$: $T_g = T_{g0} + T_a$

$$p_g = p_0 + p_a$$

$$T_s = T_m - \frac{(\Delta H)\phi_c}{\rho_s c_s}$$

最后一式来自将边界层计算用于：

$$-kT_{sx} = u_s \Delta H \phi_c$$

ϕ_c 为碳的百分比。我们必须求出 d 。

3、无量纲公式 (参数辨识)

$$x = L + \frac{\rho_s c_s u_s}{h} \tilde{x} \quad (d = L + \frac{\rho_s c_s u_s}{h} \tilde{d})$$

$$T_s = T_a + \tilde{T}_s (T_m - T_a)$$

$$T_g = T_a + \tilde{T}_g (T_m - T_a)$$

$$p_g = p_a + p_0 \tilde{p}_g$$

$$u_g = u \tilde{u}_g \quad (u = \frac{K p_0 h}{\rho_s c_s |u_s|})$$

于是得到

$$-T_{sx} = T_g - T_s$$

$$\alpha u_g T_{gx} = T_s - T_g$$

$$u_g = - |p_x|^{-1/2} p_x$$

$$x = 0: T_s = 0, p = 0$$

$$x = d: T_g = \beta, p_g = 1, T_s = 1 - \gamma$$

其中的参数为

$$\alpha = \frac{\rho_g c_g u}{\rho_s c_s u_s}, \beta = \frac{T_{g0}}{T_m - T_a}, \gamma = \frac{\Delta H \phi_c}{\rho_s c_s (T_m - T_a)}$$

现在因为 $u_g \sim 10m/s$, $u_s \sim 1m/hr = \frac{1}{3600}m/s$

$$\rho_s \sim 1000\rho_g, T_{g0} \sim 1000^{\circ}C$$

$$T - m \sim 1500^\circ\text{C}, T_a \sim 30^\circ\text{C}$$

所以

$$\alpha = O(1), \beta \sim 0.7, \gamma = O(1), (\gamma > 1 - \beta)$$

γ 表示变化的混合率, β 是变换后的输入气体的温度, α 是变换后的 $\frac{p_0}{u_0^2}$

现求 d , 因在 $x=d$ 处满足

$$T_s = 1 - \gamma = \left(\frac{\beta - \frac{\sqrt{-d}}{\alpha}(1-\gamma)}{1 - \sqrt{-d}/\alpha} \right) (1 - e^{d(1-\sqrt{-d}/\alpha)})$$

$$\text{令 } z = \frac{\sqrt{-d}}{\alpha}, z > 0$$

$$\frac{\beta}{1-\gamma} = z + \frac{1-z}{1 - e^{-\alpha^2 z^2 (1-z)}}$$

仅仅依赖于 $\frac{\beta}{1-\gamma}$, α 。 z 和 $\frac{\beta}{1-\gamma}$ 的关系的图象如图 4 所示。

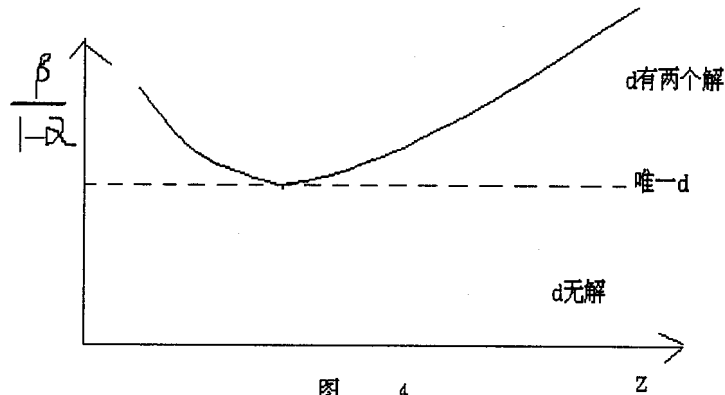


图 4

可能有一个 d 是稳定的, 另一个是不稳定的。对所得的方程及其解释还需作进一步的说明, 可以用已知的 T 来作进一步的验证。

4、模型的改进

(1) 出于力学的理由 u_s 应为 d 的一个函数。事实上, 可能

$$u_s = u_s(d, L)$$

也可能不依赖于 L 。可能 u_s 随着 d 的增加而增加。可能需要稳定化的作用。

(1) 过渡性态

固体通过高炉的过渡时间是我们感兴趣的主要时间尺度。唯一要改变的是

$$\rho_s c_s (T_{st} + u_s T_{sx}) = h(T_g - T_s)$$

和

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0$$

这是硅的百分比 ϕ_s 的守恒率。假设在 $x=L$ 处的 ϕ_s 是给定的。

可能只能求解数值解, 但将给出影响控制的时滞, 也可能关于稳定状态线性化得到控制策略。

5、最终产品的质量

铁水质量依赖于含硅的总量, 目前含量为 0.2 - 1.0%, 有望控制到 0.3 - 0.6%。

通过简单的化学反应跟踪元素的变化, 如 $\Psi = [SiO_2]$, 当它分解为硅和氧时, 可用

$$\phi_t + u_s \phi_x = -A\phi e^{-\frac{E}{RT_s}}$$

来描述。这可能是很复杂的, 我们可以进行适当的简化。

6、二维问题

引入 y 表示另一方向的变量, 固体仍用一维模型, 但气体变化依赖 y 。

$$\alpha[u_g T_{gx} + V_g T_{gy}] = T_s - T_g$$

$$u_{gx} + V_{gy} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_g \\ v_g \end{pmatrix} = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|^{1/2}}$$

在 $y = \pm 1$ 上, $V_g = 0$ 。

对二维问题可能可以讨论:

- i) 1-D 解的稳定性;
- ii) 不均匀的小压强情形, 如 $p = 1 - \epsilon e^{iy}$;
- iii) 讨论炉壁和边界层的影响

等等。

(A.Fitt 和 C.Please 撰写)